

椭圆-椭圆不适合边界的解析方程及其干涉判断

曾 龙^{1),2)} 陈 羽¹⁾ 滕弘飞¹⁾ 黎自强¹⁾ 谭建荣²⁾

¹⁾(大连理工大学机械工程学院精密与特种加工教育部重点实验室, 大连 116024)

²⁾(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘 要 在医疗内外科手术, 虚拟装配等计算机可视化领域中, 经常需检测椭圆-椭圆的干涉性。为了更好地进行干涉判断, 根据椭圆-椭圆外切的代数条件——广义特征多项式具有正的重根, 以及进一步证明出的该正重根的唯一性结论, 利用仿射变换和逆变换方法, 推导出了椭圆-椭圆的不适合边界(NFB)解析方程。根据该解析方程不仅可以直接对任意两个椭圆之间的干涉性做出精确判断, 并且可由此绘出 NFB 的轨迹图, 同时使用可视化方法给出了快速粗略的判断。在医学影像诊断上这两种方法可结合应用。

关键词 椭圆 干涉 不适合边界 广义特征多项式 碰撞检测 医疗

中图分类号: TP391.9 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)04-0917-05

No Fit Boundary Analytic Equation and Interference Detection for Ellipse-ellipse

ZENG Long^{1),2)}, CHEN Yu¹⁾, TENG Hong-fei¹⁾, LI Zi-qiang¹⁾, TAN Jian-rong²⁾

¹⁾(Key Laboratory of Precision & Non-traditional Machining of Ministry of Education, College of Mechanical & Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

²⁾(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract In many computer visualized fields such as medical and surgical operations and virtual assembly, it is of ten necessary to detect the interference between ellipses. The No Fit Boundary(NFB) of ellipse-ellipse is obtained according to the algebraic condition of exterior contact of ellipse-ellipse. To be specific, its generalized characteristic polynomial has positive double roots, which we proved further has only a double, root by using the affine transformation and inverse affine transformation. It is easy to detect interference accurately between two ellipses using NFB analytic equation. The trajectory mapped by NFB can also detect the interference quickly and visually. The above two methods can be used together in medicine.

Keywords ellipse, interference, no fit boundary(NFB), generalized characteristic polynomial, collision detection, medical treatment.

1 引言

在计算机可视化领域中, 两椭圆的干涉判断问题有广泛的应用, 例如, 由于医疗内外科手术中, 血管、神经、骨骼以及手术工具截面与椭圆相近似; 3 维圆形管路在非正交的 2 维剖面中呈椭圆形, 因此, 椭圆-椭圆不适合边界的干涉算法可以用于医疗内外科手术、虚拟装配及机器人路径规划等领域。

不干涉算法主要用于检测、判断物体轮廓或几何图形边界是否干涉, 自从 1966 年由 Art 提出两个多边形的不适合多边形(no fit polygon, NFP)法^[1]以来, 经过 Bennell 等发展, NFP 算法得到了进一步丰富和完善^[2]。

所谓不适合多边形是指: 固定一个多边形 P_1 , 设另一个多边形 P_2 的某一条边始终保持与某一坐标轴的夹角 γ 不变, 当 P_2 与 P_1 相接触, 并在其外轮廓上平动时, 则 P_2 上的参考点(一般用其形心表

基金项目: 国家自然科学基金项目(60073036, 50275019, 50335040, 50575031); 高等学校博士点专项科研基金资助项目(20010141005)

收稿日期: 2005-06-08; 改回日期: 2006-03-11

第一作者简介: 曾龙(1982 -), 男, 2005 年于大连理工大学机械工程学院获学士学位; 现于浙江大学工程及计算机图形所攻读硕士学位。主要从事计算机图形学及 CAD。E-mail: tengh@dlut.edu.cn

示)所形成的运动轨迹称为 P_1, P_2 的不适合多边形。当待判的多边形的参考点在 NFB 边界外时,为不干涉;在 NFB 边界内或者边界上时,为干涉。

可是,对于两椭圆之间的干涉轨迹不是多边形,而是曲线。对应于多边形的不适合多边形,文献[3]称两椭圆的干涉轨迹为不适合边界(no fit boundary, NFB),并给出了椭圆-椭圆静态不适合边界算法。虽然该文献根据当两椭圆相接触时,其公共点在两椭圆上且是公切点这一条件,可得到 NFB 的参数方程,但由于很难得到它们的不适合边界的解析方程,因而不便于快速精确地判断两椭圆的相对位置。

文献[4]利用二次曲面确定的广义特征多项式的根的分布情况给出了两个椭球相互分离及外切的代数条件,当两个椭球外切时,则两椭球的广义特征多项式有正的重根。文献[5]根据文献[4]的上述结论,得出了平面上两椭圆外切的代数条件:两椭圆的广义特征多项式有正的重根。但是其正重根到底有几对没有讨论。

如果求椭圆-椭圆的 NFB,首先要推导其广义特征方程,但推导过程复杂。为简化计算,本文先用仿射变换把椭圆-椭圆问题转化为椭圆-圆,再根据文献[5]椭圆-椭圆外切的判别代数条件(这一结论对于椭圆-圆当然也成立)以及本文进一步证明的两椭圆的广义特征多项式出现正重根的情况是唯一的这一结论,即可求得椭圆-圆的不适合边界的解析方程,最后即可用仿射逆变换来得到椭圆-椭圆 NFB 的解析方程。

获得 NFB 的解析方程后,其在医学诊断等领域的应用中具有以下优势:(1)把待判断椭圆的中心 $o_E = (x_E, y_E)$ 代入 NFB 解析方程(下角 E 代表椭圆 E_1, E_2),就可以立即得出所给椭圆的干涉性,而无需复杂的计算;(2)可由此方程绘出 NFB 的轨迹图,也可用可视化方法很直观、快速地判断任意两椭圆是否干涉。

2 定义和定理

根据图 1 可给出以下几点定义说明:

定义 1 椭圆 E_1 的中心与直角坐标系原点 o 重合,其长、短轴分别与坐标系 x, y 轴重合。由于椭圆 E_1 保持静止,因此称为基准椭圆;因椭圆 E_2 始终保持初始时的倾角 γ (椭圆 E_2 的长轴与 x 轴正向所

成交角 $\gamma \in [0^\circ, 360^\circ)$,逆时针方向为正),故称 E_2 为卫星椭圆。当 E_2 始终保持与 E_1 接触,并沿 E_1 的外轮廓平动时,则椭圆 E_2 的中心 $o_E = (x_E, y_E)$ (下角 E 代表 ellipse,下同)的轨迹称为 E_1, E_2 的 NFB。

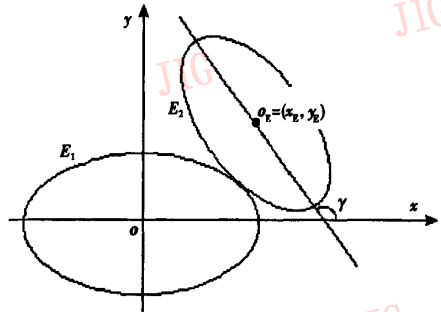


图 1 初始任意两个椭圆的位置

Fig. 1 Position of two initial ellipses

定义 2 广义特征方程 任意一条平面二次曲线 C 都可以表示为二次型的形式

$$x^T A x = 0$$

其中, $x = (x, y, 1)^T$ 是平面上点的齐次坐标, A 是一个三阶对称方阵。假设二次曲线 C_1 和 C_2 , 其对应的二次型分别为 $x^T A_1 x = 0, x^T A_2 x = 0$, 则定义二次曲线 C_1 和 C_2 的广义特征多项式为 $f(\lambda) = \det(\lambda A_1 + A_2)$, $f(\lambda) = 0$ 称为广义特征方程,其中 λ 为特征值。

定理 1 二次曲线 C_1 和 C_2 外切 $\Leftrightarrow f(\lambda) = 0$ 有正的重根。

证明见参考文献[5]定理 2 中的推论 1。

定理 2 二次曲线 C_1 和 C_2 仅有两个交点 $\Leftrightarrow f(\lambda) = 0$ 有共轭虚根。

证明见参考文献[5]中的定理 5。

定理 3 形如 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 的一元三次方程,令 $\tilde{x} = x - b/3a$, 则该方程可以简化为

$$\tilde{x} + 3p\tilde{x} + 2q = 0 \tag{1}$$

由文献[6]可知,式(1)的 3 个根 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ 分别为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \\ \tilde{x}_2 &= \omega_1 \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \omega_2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \\ \tilde{x}_3 &= \omega_2 \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \omega_1 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{aligned}$$

其中, $\omega_1 = -1/2 + \sqrt{3}i/2, \omega_2 = -1/2 - \sqrt{3}i/2$ (i 为虚数标记)。若式(1)有正的重根,则 $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 > 0$, 且是唯一的。

证明 如图 2 所示,在复平面内,由文献[6]可

知,由于 \tilde{x}_1 是实数,因此,可以假设它为正数,且令 $|v_1| = \sqrt{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$, $|v_2| = \sqrt{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$, 此处 v_1 和 v_2 是矢量,则 $\tilde{x}_1 = |v_1 + v_2|$ 。进一步假设 v_1 分布在第1象限,则 v_2 分布在第4象限,由复数运算的几何意义知, $\omega_1 v_1$ 相当于把向量 v_1 逆时针旋转 120° ,由于 $\omega_1 v_1$ 只能分布在第2、3象限,而 $\omega_2 v_2$ 也只能分布在第2、3象限,因此,由平行四边形法则知, $\tilde{x}_2 = \omega_1 v_1 + \omega_2 v_2$ 也只能在第2、3象限,且肯定有 $\tilde{x}_2 < 0$,即 \tilde{x}_2 不可能等于 \tilde{x}_1 ;同理分析可知,由于 \tilde{x}_3 能分布在第1、2、3、4象限,因此重根有可能是 $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 > 0$ 或 $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 < 0$,但正重根只可能是 $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_3 > 0$,且是唯一的,结论得证。

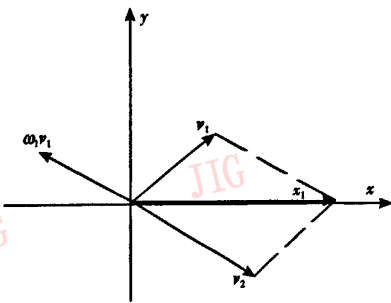


图2 复平面内根分布

Fig. 2 Distribution of roots in complex plane

3 求解过程

为简化 NFB 轨迹方程的求解,把椭圆-椭圆问题通过仿射变换简化为椭圆-圆,且仿射变换不会改变椭圆的拓扑性质及两椭圆的广义特征多项式。

3.1 椭圆 E_1, E_2 的初始状态

在直角坐标系 xoy 中,设 E_1 的中心在原点,其方程为

$$x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$$

E_2 的中心在 $o_E = (x_E, y_E)$, 其方程为

$$\begin{aligned} & [(x - x_E) \cdot \cos\gamma + (y - y_E) \cdot \sin\gamma]^2/a_2^2 + \\ & [-(x - x_E) \cdot \sin\gamma + (y - y_E) \cdot \cos\gamma]^2/b_2^2 = 1 \end{aligned}$$

3.2 仿射变换后 E_1, E_2 的方程

坐标旋转变换关系式(逆时针方向 γ 为正)为

$$\begin{cases} x = x_1 \cdot \cos\gamma - y_1 \cdot \sin\gamma \\ y = x_1 \cdot \sin\gamma + y_1 \cdot \cos\gamma \end{cases} \quad (2)$$

x_1, o_1, y_1 为仿射变换(即第1次变换)后的新坐标

系,其中 E_1 的方程为

$$(x_1 \cdot \cos\gamma - y_1 \cdot \sin\gamma)^2/a_1^2 + (x_1 \cdot \sin\gamma + y_1 \cdot \cos\gamma)^2/b_1^2 = 1$$

若 E_2 的中心设为 $o_1^E = (x_1^E, y_1^E)$, 则其方程为

$$(x_1 - x_1^E)^2/a_2^2 + (y_1 - y_1^E)^2/b_2^2 = 1$$

3.3 投影变换后的 E_1, E_2 的方程

投影变换关系式为

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \cdot b_2/a_2 \end{cases} \quad (3)$$

x_2, o_2, y_2 为投影变换(即第2次变换)后的新坐标系, E_1 的方程为

$$\begin{aligned} & [x_2 \cdot \cos\gamma - b_2 \cdot y_2 \cdot \sin\gamma/a_2]^2/a_1^2 + \\ & [x_2 \cdot \sin\gamma + b_2 \cdot y_2 \cdot \cos\gamma/a_2]^2/b_1^2 = 1 \end{aligned} \quad (4)$$

E_2 的中心设为 $o_2^E = (x_2^E, y_2^E)$, 则其方程为

$$(x_2 - x_2^E)^2 + (y_2 - y_2^E)^2 = a_2^2 \quad (5)$$

3.4 投影变换后, E_1, E_2 的广义特征多项式

把式(4)和式(5)写成如下二次型形式:

$$\begin{cases} x^T \cdot M_1 \cdot x = 0 \\ x^T \cdot M_2 \cdot x = 0 \end{cases}$$

其中, $M_1 = \begin{bmatrix} m_1 & m_3 & 0 \\ m_3 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

矩阵中,

$$\begin{cases} m_1 = \cos^2\gamma/a_1^2 + \sin^2\gamma/b_1^2 \\ m_2 = b_2^2 \sin^2\gamma/a_1^2 a_2^2 + b_2^2 \cos^2\gamma/b_1^2 a_2^2 \\ m_3 = -b_2 \sin\gamma \cos\gamma/a_2 a_1^2 + b_2 \sin\gamma \cos\gamma/a_2 b_1^2 \end{cases} \quad (6)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2^E \\ 0 & 1 & -y_2^E \\ -x_2^E & -y_2^E & -a_2^2 + (x_2^E)^2 + (y_2^E)^2 \end{bmatrix}$$

因此,由定义3得到的广义特征方程为

$$f(\lambda) = \det(\lambda \cdot M_1 + M_2) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (7)$$

式中,

$$\begin{cases} a = -m_1 \cdot m_2 + m_2^2 \\ b = -m_1 - m_2 + (a_2^2 - (x_2^E)^2 - (y_2^E)^2) \cdot m_3 - (a_2^2 - (x_2^E)^2 - (y_2^E)^2) \cdot m_1 \cdot m_2 \\ c = -1 - (a_2^2 - (x_2^E)^2) \cdot m_1 - (a_2^2 - (y_2^E)^2) \cdot m_2 + 2x_2^E y_2^E \cdot m_3 \\ d = -a_2^2 \end{cases} \quad (8)$$

3.5 化简广义特征方程

令 $\lambda = \psi - b/3a$, 代入式(7), 则整理得到

$$f(\psi) = \psi^3 + 3p \cdot \psi + 2q = 0 \quad (9)$$

式中,

$$\begin{cases} p = c/3a - b^2/(9a^2) \\ q = b^3/(27a^3) - bc/(6a^2) + d/(2a) \end{cases} \quad (10)$$

3.6 求解椭圆-圆的 NFB 轨迹方程

设式(9)的 3 个根为 ψ_1, ψ_2, ψ_3 , 则

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \\ \psi_2 &= \omega_1 \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \omega_2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \\ \psi_3 &= \omega_2 \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \omega_1 \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \end{aligned}$$

由定理 3 知, 当 $f(\psi) = 0$ 有正重根, 则有

$$\psi_1 = \psi_3 \quad (11)$$

此时, 在 $x_2 o_2 y_2$ 坐标系中, 椭圆 E_1 和椭圆 E_2 外切, 又由定义 1 知, 此时 E_2 的中心 $o_2^E = (x_2^E, y_2^E)$ 运动所形成的轨迹即为椭圆-圆的不适合边界。从式(11)可以得其不适合边界轨迹方程

$$\psi_1 - \psi_3 = 0 \quad (12)$$

把式(6)、式(8)、式(10)代入式(12)就可得到在 $x_2 o_2 y_2$ 坐标系中的解析方程

$$G(x_2^E, y_2^E, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma) = 0 \quad (13)$$

3.7 仿射逆变换求椭圆-椭圆的 NFB 轨迹方程

联立式(2)、式(3)解出仿射变换逆变换关系式

$$\begin{cases} x_2^E = x^E \cos \gamma + y^E \sin \gamma \\ y_2^E = a_2(-x^E \sin \gamma + y^E \cos \gamma)/b_2 \end{cases} \quad (14)$$

若将式(14)代入式(13), 且用 x, y 代替 x_2^E, y_2^E 则可以得到 xoy 坐标系中椭圆-椭圆不适合边界的轨迹方程

$$F(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma) = 0 \quad (15)$$

式(15)的详细表达式可用软件 Mathematica4.0 推导出(其表达式较长, 限于篇幅, 从略)。

3.8 两种干涉判断方法

(1) 精确判断

① 若 $F(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma) > 0$, 椭圆 E_2 的中心点在 NFB 外, 则不干涉。

② 若 $F(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma) = 0$, 椭圆 E_2 的中心点在 NFB 上, 则不干涉。

③ 若 $F(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma)$ 是虚数, 根据定理 2 可知, 椭圆 E_2 的中心点在 NFB 内, 则两椭圆干涉。

(2) 可视化图形判断

用“双向跟踪算法”, 即 x 方向定长搜索, y 方向在前一步最优值的基础上也进行定长搜索, 当用软

件 Matlab6.5 画出解析方程 NFB 的轨迹图后, 则可以用可视化方法估计两椭圆的干涉性。

3.9 最大包容框的求解

在设计中, 若考虑外科手术的手术空间或虚拟装配空间问题, 则往往还要求给出两椭圆的最大包容框(maximum tolerant boundary, MTB)。如图 1 所示, 当椭圆 E_2 绕椭圆 E_1 平动时, 则把 E_2 上离原点 o 总是最远的点所形成的轨迹定义为最大包容框。这样, 若其他机构在 MTB 外, 则可保证该机构绝对不会和两椭圆机构干涉。

在椭圆-圆中根据正弦定理易证, 由于离原点 o 的最远点总是椭圆中心 o 和圆心 o_2^E 连线的延长线与圆的交点, 因此, 椭圆-圆的 MTB 上任一点到其 NFB 上的对应点的距离即为圆的半径。

在 $x_2 o_2 y_2$ 坐标系中, 设 MTB 上任意点为 $p = (x_2, y_2)$, 则分别根据 $|p o_2^E| = a_2$ 和 o_2^E 在椭圆-圆的 NFB 上, 且 p, o_2^E, o 是 3 点共线, 就可以得到以下的方程组:

$$\begin{cases} (x_2 - x_2^E)^2 + (y_2 - y_2^E)^2 = a_2^2 \\ G(x_2^E, y_2^E, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma) = 0 \\ y_2/x_2 = y_2^E/x_2^E \end{cases} \quad (16)$$

联立式(16)中的 3 个方程就可以得到椭圆-圆的 MTB 方程, 若再使用式(14)的仿射逆变换, 且用 x, y 代替 x_2, y_2 , 则可得到 xoy 坐标系中的椭圆-椭圆 MTB 方程

$$H(x, y, a_1, b_1, a_2, b_2, \gamma) = 0 \quad (17)$$

详细表达式可用软件 Matlab6.5 推导出(表达式较长, 因占用篇幅, 从略)。

4 示例

下面用算例来验证对于给定的任意两个椭圆不适合边界的解析方程的求解及其干涉判断。

在直角坐标系中, 设基准椭圆 $E_1(0, 0, 9, 4, 0)$, 卫星椭圆 $E_2(x_E, y_E, 9, 4, \pi/6)$, E_2 的中心 o_E 的坐标为 (x_E, y_E) 。基准椭圆 $E_1(0, 0, 9, 4, 0)$ 保持不变, E_2 只变化中心 o_E 的坐标值, 干涉判断结果见表 1。

此外, 按照第 3 节所述步骤就可以求得椭圆 E_2 和 E_1 的 NFB 解析方程 $F(x, y, 9, 4, 9, 4, \pi/6) = 0$ 和 MTB 解析方程 $H(x, y, 9, 4, 9, 4, \pi/6) = 0$, 其详细表达式可用软件 Mathematica4.0 推导出(从略)。用软件 Matlab6.5 绘出的 NFB 和 MTB 轨迹如图 3 所示。

表 1 两椭圆的干涉计算及判断结果
Tab.1 Interference calculation and judging results of two ellipses

椭圆 E_2	$F(x, y, 9, 4, 9, 4, \pi/6)$	干涉
$o_E(-20, -1)$	417.8	否
$o_E(-15, -1)$	$150.4 + 8.7i$	是
$o_E(10, 5)$	$124.2 + 102i$	是
$o_E(10, -10)$	90.8	否

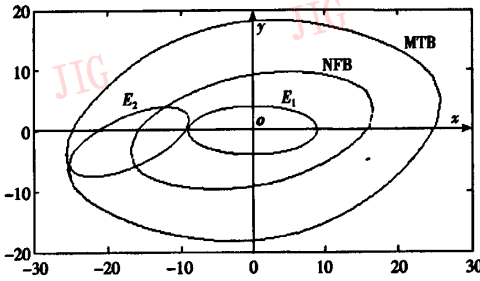


图 3 $E_1(0, 0, 9, 4, 0)$, $E_2(x_E, y_E, 9, 4, \pi/6)$ 的 NFB 和 MTB 轨迹

Fig.3 NFB&MTB of $E_1(0, 0, 9, 4, 0)$ and $E_2(x_E, y_E, 9, 4, \pi/6)$

顺便说明,本文讨论的是图 1 中的 $\gamma =$ 常数,这是目前讨论的两待布物只做相对平移,而不转动的情况;当 γ 为变量时,则将文献[3]的动态不适合边界的处理方法(该文称之为“动态”情况)加入本方法,即可实现卫星椭圆既平移又转动情况下的不干涉判断。

5 结 论

本文由于得到了椭圆-椭圆的 NFB 解析方程,从而可快速准确地进行干涉判断,并且可实现 NFB 干涉判断的可视化,以供工程和医学上应用。

给定任意两个椭圆,利用仿射变换及其逆变换,以及椭圆-椭圆的广义特征方程有唯一的正的重根对应着椭圆-椭圆外切这一条件,可推导出椭圆-椭圆的 NFB 解析方程。文中还给出以下判断任意两个椭圆干涉性的两种方法:一是将待判断椭圆的中心参数代入 NFB,以便根据干涉判断条件做出精确判断(可由计算机自动完成);二是根据 NFB 轨迹图,用可视化方法做快速粗略判断。在医学诊断上应用,可采用二者相结合的方法。

参考文献 (References)

- Art R C. An approach to the two dimensional irregular cutting stock problem[R]. Technique Report 36-Y08. Cambridge CA, USA; IBM Cambridge Scientific Center 1966.
- Bennell J A, Dowland K A, Dowland W B. The irregular cutting-stock problem—a new procedure for deriving the no-fit polygon [J]. Computers & Operations Research, 2001, 28(3): 271 ~ 287.
- Chen Yu, Teng Hong-fei. Dynamic and static no fit boundary algorithm for ellipse-ellipse [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2003, 43(6): 779 ~ 782. [陈羽, 滕弘飞. 椭圆-椭圆静态不适合边界算法[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(6): 779 ~ 782.]
- Wang Wen-ping, Wang Jia-ye, Kim Myung-Soo. An algebraic condition for the separation of two ellipsoids [J]. Computer Aided Geometric Design, 2001, 18(6): 531 ~ 539.
- Liu Yang, Shen Li-yong. An algebraic condition for classifying the positional relationship of two planar ellipses [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2003, 15(5): 555 ~ 560. [刘洋, 申立勇. 判别平面上两个椭圆位置关系的代数条件[J]. 计算机辅助设计和图形学学报, 2003, 15(5): 555 ~ 560.]
- Hou Wen-lin. The formula method and computer program of simple cubic equation [J]. Journal of Xin Xiang Teachers' College of Science & Technology, 1998, (1): 9 ~ 12. [侯文林. 一元三次方程的公式解法与电算程序[J]. 新乡师专学报(自然科学版), 1998, (1): 9 ~ 12.]